FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

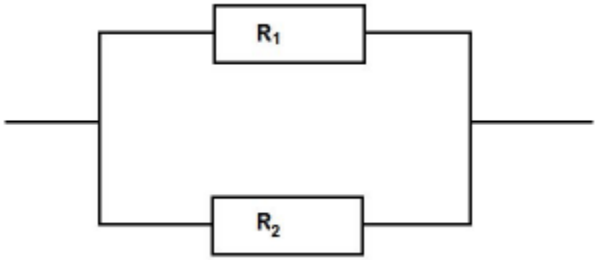
Anwendungsbeispiel

Übersicht:

- Was ist differentielle Fehlerrechnung?
- Wie gehe ich vor? -> Algorithmus
- Wieso bzw. wie funktioniert differentielle Fehlerrechnung?

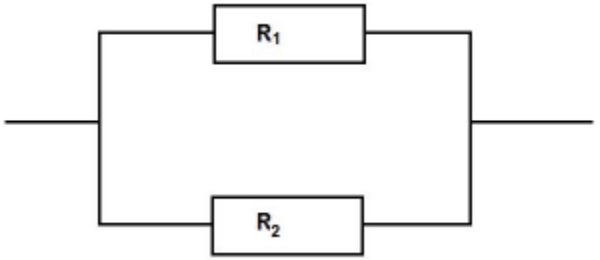
Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung



Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

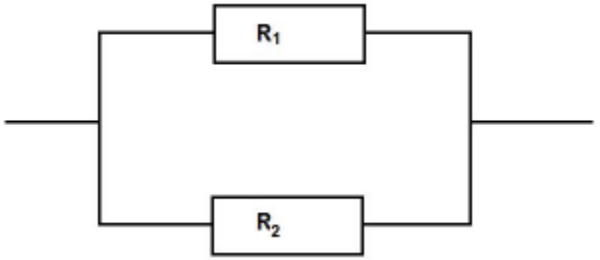


Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

Für den Gesamtwiderstand gilt:

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$



Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

Für den Gesamtwiderstand gilt:

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

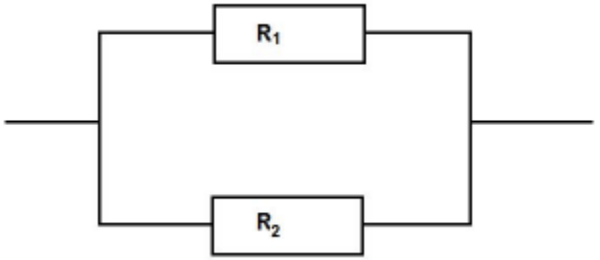
Wir arbeiten mit den folgenden Werte:

$$R_1 = 80\ \Omega$$
$$R_2 = 120\ \Omega$$

$$R_{ges} = 48\ \Omega$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung



Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

Für den Gesamtwiderstand gilt:

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Wir arbeiten mit den folgenden Werte:

$$R_1 = 80\ \Omega$$
$$R_2 = 120\ \Omega$$

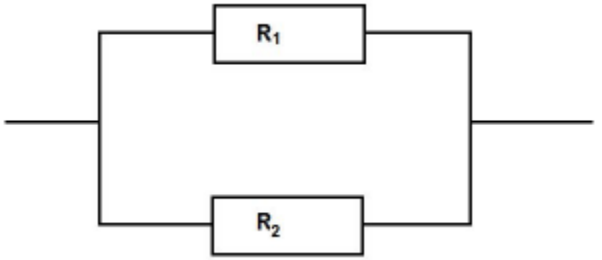
$$R_{ges} = 48\ \Omega$$

Fragen:

Was passiert, wenn wir die Widerstände ein wenig ändern?

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung



Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

Für den Gesamtwiderstand gilt:

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Wir arbeiten mit den folgenden Werte:

$$R_1 = 80\ \Omega$$
$$R_2 = 120\ \Omega$$

$$R_{ges} = 48\ \Omega$$

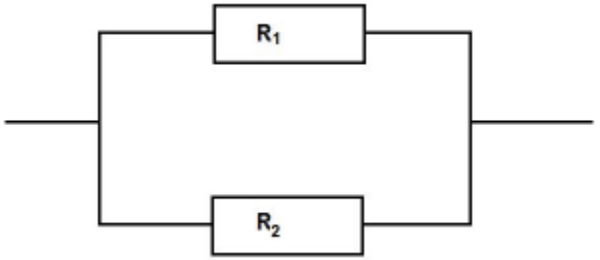
Fragen:

Was passiert, wenn wir die Widerstände ein wenig ändern?

Wie ändert sich dann der Gesamtwiderstand?

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung



Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

Für den Gesamtwiderstand gilt:

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Wir arbeiten mit den folgenden Werte:

$$R_1 = 80\ \Omega$$
$$R_2 = 120\ \Omega$$

$$R_{ges} = 48\ \Omega$$

Fragen:

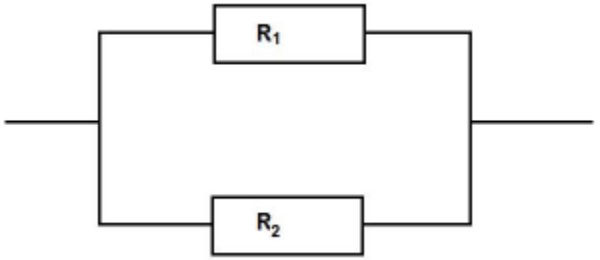
Was passiert, wenn wir die Widerstände ein wenig ändern?

Wie ändert sich dann der Gesamtwiderstand?

Wie wirken sich Messfehler in den Einzelwiderständen auf den Gesamt-widerstand aus?

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung



Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Linearisierung:

$$R_{ges} = R(R_1, R_2) \approx R(80{,}120) + \left(\partial_{R_1} R(80{,}120)\,, \partial_{R_2} R(80{,}120)\right) \cdot \begin{pmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \end{pmatrix}$$

Ausgangspunkt
Sind unsere
Werte…

$$\partial_{R_1} R(80{,}120) \cdot \Delta R_1 + \partial_{R_2} R(80{,}120) \cdot \Delta R_2$$

$$R_1 = 80\ \Omega$$

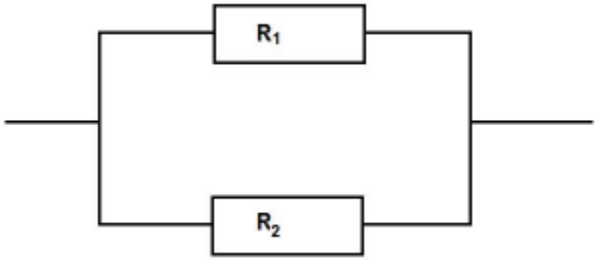
$$R_2 = 120\ \Omega$$

$$\Delta R_1 = R_1 - 80$$

$$\Delta R_2 = R_2 - 120$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung



Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Linearisierung:

$$R_{ges} = R(R_1, R_2) \approx R(80{,}120) + \partial_{R_1} R(80{,}120) \cdot \Delta R_1 + \partial_{R_2} R(80{,}120) \cdot \Delta R_2$$

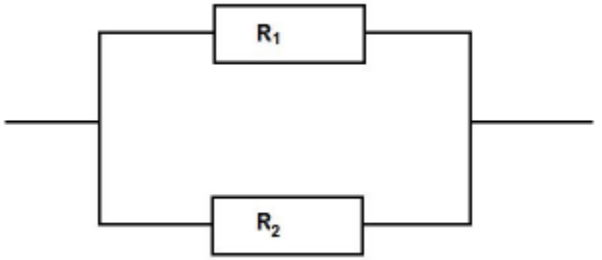
$$\partial_{R_1} R = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$\partial_{R_2} R = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$R(R_1, R_2) \approx 48 + 0.36 \cdot \Delta R_1 + 0.004 \cdot \Delta R_2$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung



Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Linearisierung:

$$R(R_1, R_2) \approx 48 + 0.36 \cdot \Delta R_1 + 0.004 \cdot \Delta R_2$$

$$R(R_1, R_2) - 48 \approx 0.36 \cdot \Delta R_1 + 0.004 \cdot \Delta R_2$$

$$|R(R_1, R_2) - 48| \approx |0.36 \cdot \Delta R_1 + 0.004 \cdot \Delta R_2|$$

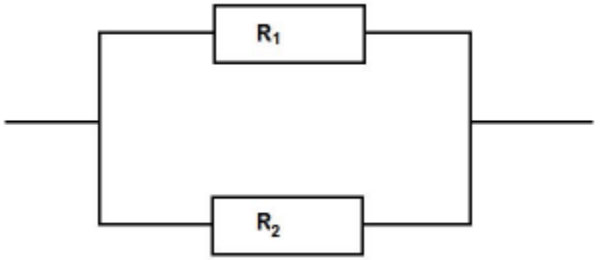
$$|R(R_1, R_2) - 48| \leq |0.36 \cdot \Delta R_1| + |0.004 \cdot \Delta R_2|$$

Dreiecksungleichung:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung



Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Fehlerabschätzung:

$$|R(R_1, R_2) - 48| \leq |0.36 \cdot \Delta R_1| + |0.004 \cdot \Delta R_2|$$

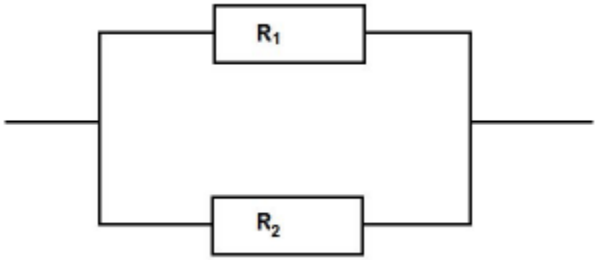
Fehler bei Änderung von R_1

Fehler bei Änderung von R_2

Wir sehen, dass sich eine Änderung von R_1 stärker auf den Gesamtwiderstand auswirkt, als Änderung von R_2 …

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung



Beispiel: Widerstandsberechnung

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Widerständen…

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Fehlerabschätzung:

$$|R(R_1, R_2) - 48| \leq |0.36 \cdot \Delta R_1| + |0.004 \cdot \Delta R_2|$$

Beispiel:

Wir ändern beide Einzelwiderstände jeweils um $1\,\Omega$…

$$|R(81{,}120) - 48| \leq |0.36 \cdot 1| + |0.004 \cdot 0| = 0{,}36 \quad \Rightarrow \quad R(81{,}120) = 48.358$$

$$|R(80{,}121) - 48| \leq |0.36 \cdot 0| + |0.004 \cdot 1| = 0{,}004 \quad \Rightarrow \quad R(80{,}121) = 47.921$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Beispiel: Widerstandsberechnung

Wozu das Ganze, wenn wir doch direkt die Änderung in die Formel einsetzen können und so den exakten Fehler ausrechnen können?

→ Wenn Messfehler vorliegen, kenne ich den exakten Wert nicht

→ Ich kenne i.d.R. nur Toleranzen, d.h. ΔR_i

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Algorithmus

Wir interessieren und für eine Größe f, die von mehreren Messgrößen $x_1, x_2, \dots x_n$ abhängt.



$$f = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Algorithmus

Wir interessieren und für eine Größe f, die von mehreren Messgrößen $x_1, x_2, \dots x_n$ abhängt.

$$f = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Wir messen $x_1, x_2, \dots x_n$ mit einem bekannten Messfehler (Messtoleranz): Δx_i

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Algorithmus

Wir interessieren und für eine Größe f, die von mehreren Messgrößen $x_1, x_2, \dots x_n$ abhängt.

$$f = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Wir messen $x_1, x_2, \dots x_n$ mit einem bekannten Messfehler (Messtoleranz): Δx_i

Für den Fehler, den wir bei der Bestimmung der Größe f erwarten können, erhalten wir mit differentieller Fehlerrechnung…

$$|\Delta f| \leq \left|\partial_{x_1} f\right| \cdot \Delta x_1 + \left|\partial_{x_2} f\right| \cdot \Delta x_2 + \cdots \left|\partial_{x_n} f\right| \cdot \Delta x_n$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Algorithmus

Wir interessieren und für eine Größe f, die von mehreren Messgrößen $x_1, x_2, \dots x_n$ abhängt.

$$f = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Wir messen $x_1, x_2, \dots x_n$ mit einem bekannten Messfehler (Messtoleranz): Δx_i

Für den Fehler, den wir bei der Bestimmung der Größe f erwarten können, erhalten wir mit differentieller Fehlerrechnung…

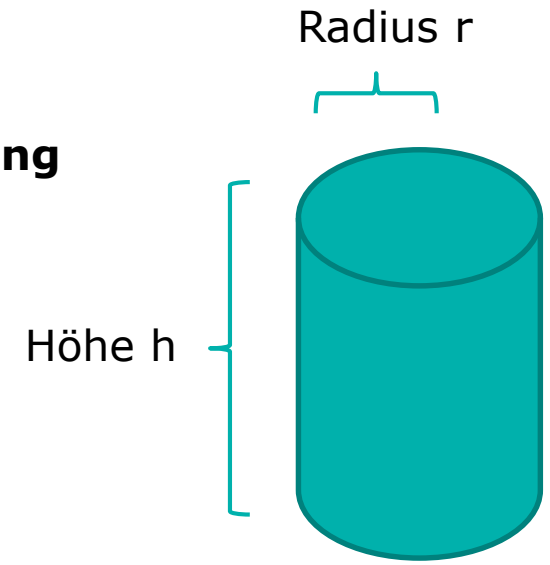
$$|\Delta f| \leq \left|\partial_{x_1} f\right| \cdot \Delta x_1 + \left|\partial_{x_2} f\right| \cdot \Delta x_2 + \cdots \left|\partial_{x_n} f\right| \cdot \Delta x_n$$

Den relativen Fehler erhalten wir, indem wir durch $f = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ teilen…

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Algorithmus: Schwierigkeiten bei der Anwendung



Statistische Messauswertung

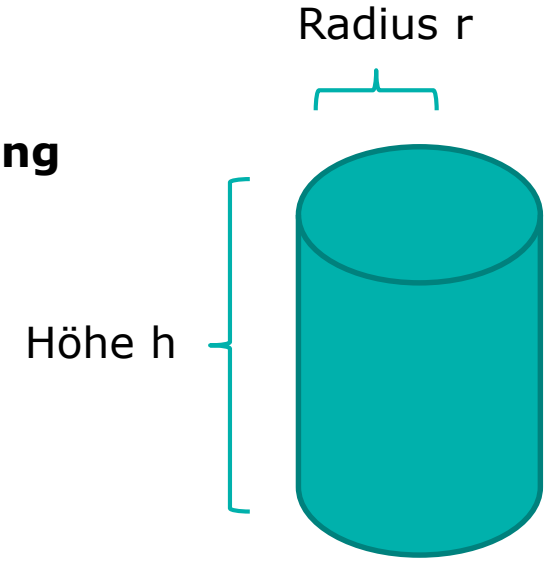
Differentielle Fehlerrechnung

Algorithmus: Schwierigkeiten bei der Anwendung

Welche Größen werden gemessen?

Welche Größen sind die Fehlertoleranzen?

Welche Größe soll bestimmt werden?



$$m = (89 \pm 0.3)g$$

$$h = (8.9 \pm 0.001)\ cm$$

$$r = (4.5 \pm 0.01)\ cm$$

Messwert $= x_i$

Messtoleranz $= \Delta x_i$

Wir interessieren uns für die Dichte, d.h. $f = \rho$

$$\rho(m, h, r) = \frac{m}{\pi r^2 h}$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Wir wollen das Trägheitsmoment eines Vollzylinders, der um seine Symmetrieachse rotiert berechnen.



Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Wir wollen das Trägheitsmoment eines Vollzylinders, der um seine Symmetrieachse rotiert berechnen.



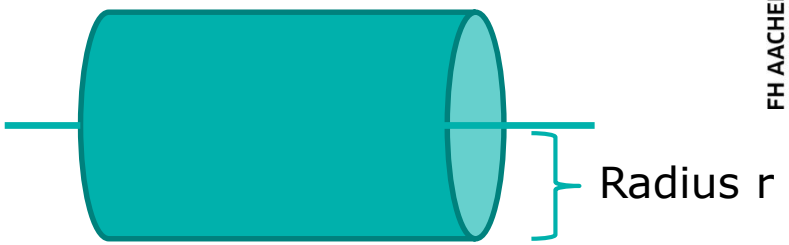
Die Formel lautet: $$I = \frac{1}{2} m r^2$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Wir wollen das Trägheitsmoment eines Vollzylinders, der um seine Symmetrieachse rotiert berechnen.



Die Formel lautet: $$I = \frac{1}{2} m r^2$$

Wir messen die folgenden Größen…

Radius r $$r = (250 \pm 0.1)\ \text{mm}$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Wir wollen das Trägheitsmoment eines Vollzylinders, der um seine Symmetrieachse rotiert berechnen.



Die Formel lautet: $$I = \frac{1}{2} m r^2$$

Wir messen die folgenden Größen…

Radius r $$r = (250 \pm 0.1)\ \text{mm}$$

Masse m $$m = (5 \pm 0.001)\ \text{kg}$$

Wie groß ist der zu erwartende Fehler im Trägheitsmoment, der auf Grund der Messfehler zu erwarten ist?

Wird eine Güte von 1% erreicht?

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Wir wollen das Trägheitsmoment eines Vollzylinders, der um seine Symmetrie-achse rotiert berechnen.



Wir berechnen die partiellen Ableitungen…

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

$$r = (250 \pm 0.1)\ \text{mm}$$

$$m = (5 \pm 0.001)\ \text{kg}$$

$$\partial_m I = \frac{1}{2} r^2 \Rightarrow \partial_m I = 31250$$

$$\partial_r I = mr \Rightarrow \partial_r I = 1250$$

Damit erhalten wir den absoluten Fehler: $\Delta I \leq 31250 \cdot \Delta m + 1250 \cdot \Delta r = 156.25$

Der relative Fehler liegt bei: $\frac{\Delta I}{I} \leq \frac{156.25}{156250} = 0.001 = 0.1\%$

Wieso ist diese Abschätzung gut?

Wir betrachten die Definition des Gradienten…

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \nabla f(x)^T \cdot \Delta x + r(\Delta x) \qquad \text{mit} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Statistische Messauswertung

Differentielle Fehlerrechnung

besser als linear…

Wieso ist diese Abschätzung gut?

Wir betrachten die Definition des Gradienten…

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \nabla f(x)^T \cdot \Delta x + r(\Delta x)$$

mit $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0$

Wir formen um…

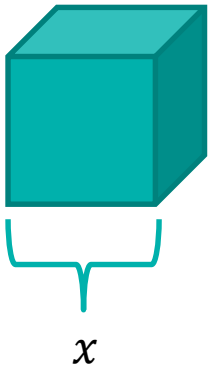
„Güte" des Fehlerschätzers

unsere Fehlerabschätzung

$$\underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{= \Delta f} = \underbrace{\nabla f(x)^T \cdot \Delta x}_{= \partial_{x_1} f(x) \cdot \Delta x_1 + \partial_{x_2} f(x) \cdot \Delta x_2 + \cdots + \partial_{x_n} f(x) \cdot \Delta x_n} + r(\Delta x)$$

Spezialfall 1d…

Wir wollen das Volumen eines Würfels bestimmen und messen dazu die Seitenlängen…



$$x = (50 \pm 0.01)\ \text{mm}$$

Für das Volumen gilt… $V = x^3 = 125000\, mm^3$

Die differentielle Fehlerschätzung liefert…

$$\Delta V \leq \underbrace{3x^2}_{V'(x)} \cdot \Delta x = 7500 \cdot 0.01 = 75\, mm^3$$

Relativer Fehler… $\frac{\Delta V}{V} \leq \frac{75}{125000} = 0.0006$

$= 0.06\% = 0.6\ {}^{0}/_{00}$